Beitrag zum Gültigkeitsbereich der Fresnelschen Reflexionsformeln.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN
UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT

DER

KÖNIGLICHEN WESTFÄLISCHEN
WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU MÜNSTER I. W.

VORGELEGT

VON

Paul Voigdt
aus Dombrowken (Kreis Darkehmen)

Berlin 1911.
Universitäts-Buchdruckerei von Gustav Schade (Otto Francke)
Linienstr. 158.

Dekan: Professor Dr. Meister.

Referent: Professor Dr. Konen.

Einleitung.

Bei der Untersuchung darüber ob die Fresnelschen Reflexionsformeln sich mit den Ergebnissen decken, die man auf experimentalem Wege erhält, ist man zu verschiedenen Resultaten gelangt. Arbeiten, die noch später genauer zitiert werden, haben zu dem Ziele geführt, eine gute Übereinstimmung zwischen der theoretischen Formel und dem praktischen Versuch zu beweisen. Fresnel[1]) selbst, Desains[2]), Brewster[3]), Conroy[4]), Glan[5]), Koenigsberger[6]) und viele andere sind auf diesem Wege bahnbrechend vorgegangen. Auch der bekannte englische Forscher Lord Rayleigh[7]) hat die Intensitäten des von Glas und und Wasser reflektierten Lichtes photometrisch bestimmt. Bei einigen dieser Versuche ergab sich eine Abhängigkeit des Reflexionsvermögens der Glasplatte von dem Alter der Politur der Oberfläche. Wenn man auch experimentell keine Änderung in der Politur wahrnehmen kann, so neigt dennoch Rayleigh der Ansicht zu, daß eine Änderung der Oberfläche stattfinden muß. Auch in anderen Versuchen[8]) schreibt Rayleigh den Oberflächen einen Einfluß auf die Reflexion zu, ja er wird bei diesen Experimenten sogar zu der Meinung geführt, daß die Fresnelschen Formeln nicht genügen, um die bei seinen Untersuchungen beobachteten Erscheinungen zu erklären.

---

[1]) A. Fresnel, Ann. Chim. Phys. 17, 314, 1821.

[2]) P. Desains, Comp. Rend. 31, 676, 1850; Ann. Chim. Phys. 31, 286, 1851; Pogg. Ann. 82, 152, 1851.

[3]) D. Brewster, Phil. Trans. 1830, Pogg 19, 1830.

[4]) I. Conroy, Phil. Trans. 180, 245, 1889; Proc. Roy. Soc. 45, 101, 1888.

[5]) P. Glan, Berl. Ber. 1874, p. 511; Wied. Ann. 50, 590, 1893.

[6]) J. Koenigsberger, Phys. Zs. 4, 494, 1903.

[7]) Lord Rayleigh, Nat. 35, 64, 1886; Proc. Roy. Soc. 41, 275, 1886; Phil. Mag. 34, 309, 1892.

[8]) Lord Rayleigh, Rep. of the Brit. Assoc. 1875, p. 585; Scientific Papers Bd. III, p. 15.

Die Versuche, die Rayleigh unternahm, seien im folgenden kurz skizziert. Angeregt durch eine Mitteilung Christiansens[9]), worin derselbe den ungestörten Durchgang des Lichtes einer bestimmten Farbe durch Glaspulver zeigte, welches mit einer Flüssigkeit von dem gleichen Brechungsexponenten für die betreffende Farbe gemischt war, wollte Rayleigh feststellen, ob an zwei Medien, die für eine Stelle des Spektrums Gleichheit der Brechungsexponenten besitzen, auch tatsächlich die Reflexion des betreffenden Strahles aufgehoben wird. Dazu benutzte er eine Glasplatte, die sich in einer Schwefelkohlenstoff-Benzolmischung befand. Die Mischungsverhältnisse können unter diesen Umständen so gewählt werden, daß für die „D"-Linie das flüssige und feste Medium gleiche Brechungsverhältnisse besitzen. Es zeigte sich nun, daß bei großen Einfallswinkeln im blauen und violetten Teile des Spektrums Totalreflexion*) stattfand, eine geringere im Bezirk der roten Strahlen. Rayleigh gibt sogar an, daß im gelben Teile eine immerhin bemerkbare Reflexion stattfände, trotzdem hier Gleichheit der Brechungsexponenten herrschte. Das Gebiet der Totalreflexion rückt mit wachsendem Einfallswinkel nach dem gelben Teile des Spektrums hin, wobei im Gelb ein starker Helligkeitsabfall stattfindet**). Im orangen und roten Teile nimmt die Stärke der Reflexion wieder zu, ohne daß Totalreflexion eintritt. Nach Ansicht des englischen Forschers ist die Dunkelheit im Gelb auf Rechnung einer Kontrastwirkung zu setzen. Den Grund der beobachteten Reflexion glaubt er nicht in der Verschiedenheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes in den beiden Medien zu finden, sondern in dem Vorhandensein eines Häutchens auf der Oberfläche der Glasplatte. Er gibt zwar an, daß bei mäßigen Einfallswinkeln auch bei sorgfältigster Reinigung der

---

[9]) C. Christiansen, Ann. d. Physik 23, p. 300, 1884.

*) Im engl. Wortlaut: „total for the violet and blue; scanty but not evanescent for the yellow; more copious again in the red."

**) Im engl. Wortlaut: closer and closer upon the ray of equal index and ultimately there is a very sharp transition between this region and the band which now looks very dark. On the other side the reflection revives, but more gradually, and becomes very copious in the orange and red. On this side the reflection is not technically total.

UNIV. LEIDEN BIBL.

Glasplatte immerhin noch eine merkliche Reflexion vorhanden war, glaubt aber trotzdem nicht folgern zu können, daß keine genügende Oberflächenschicht wirksam wäre, und hält eine Entscheidung der Frage nur durch ein Experiment an einer frisch durch Bruch erhaltenen Oberfläche für möglich. Jedenfalls gibt er seiner Meinung dahin Ausdruck, daß die Fresnelschen Formeln den Schlüssel zu Lösung nicht bieten. Unbewiesen stellt er den Satz auf, daß zufolge der Fresnelschen Formeln wegen der Gleichheit der Brechungsexponenten für gelbe Strahlen zumindest im ganzen sichtbaren Spektrum keine merkliche Reflexion stattfinden dürfte*).

Dieser Ansicht ist in einer Arbeit Meitners[10]) widersprochen worden, die die Anwendbarkeit der Fresnelschen Formeln doch für möglich hält und zur Erklärung des Vorganges diese einer Umformung unterwirft. Der Grundgedanke, der diese eben genannte Arbeit durchzieht, ist der, in den Fresnelschen Ausdruck für die Komponenten des Lichtes unendliche Produkte resp. Reihen einzuführen. Bekanntlich sind die Energievorgänge bei Reflexion von Lichtstrahlen durch die folgenden Gleichungen dargestellt:

$$\text{I)} \qquad R_s = -E_s \frac{\sin(\varphi - \chi)}{\sin(\varphi + \chi)}$$

$$\text{II)} \qquad R_p = E_p \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \chi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \chi)}.$$

Hierin bedeutet:

R_s die Amplitude des in der Einfallsebene polarisierten reflektierten Lichtes

E_s die Amplitude des ebenso polarisierten einfallenden Lichtes

---

*) Im engl. Wortlaut: „Indeed calculation shows that, according to Fresnel's formulae, the reflection would be nearly insensible at all parts of the spectrum when the index is adjusted for the yellow. The outstanding reflection is not due to a difference of wave-velocities, but to some other cause not usually taken into account."

[10]) Dr. Lise Meitner, Über einige Folgerungen, die sich aus den Fresnelschen Reflexionsformeln ergeben. Sitz.-Ber. d. Kais. Akad. d. W. zu Wien. Mathem. naturw. Klasse, Bd. CXV, Abt. IIa, 1906, p. 859.

R_p und E_p die Amplituden des senkrecht zur Einfallsebene polarisierten reflektierten resp. einfallenden Lichtes

φ den Einfallswinkel

χ den Brechungswinkel.

Wegen der bestehenden außerordentlich geringen Verschiedenheit der Brechungsexponenten wird sowohl in dem Ausdruck

$$T = \frac{\sin(\varphi - \chi)}{\sin(\varphi + \chi)}$$

als auch in

$$S = \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \chi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \chi)}$$

der Zähler sehr klein, da der Einfallswinkel φ und der Brechungswinkel χ auch nur sehr wenig differieren. Frl. Meitner glaubt nun, daß bei der Darstellung der Sinusfunktionen durch unendliche Produkte sich auch im Nenner ein Ausdruck finden ließe, der sich gegen den verschwindend kleinen Wert $\varphi - \chi$ wegkürzt. Der mathematische Weg muß doch immerhin von uns erwähnt werden, da wir uns sonst mit den Resultaten von Meitner nicht auseinandersetzen können. Führt man die Produktenentwicklung ein, so ergibt sich:

$$T = \frac{\varphi - \chi}{\varphi + \chi} \cdot \frac{\prod_{m=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{\varphi - \chi}{m\pi} \right)^2 \right]}{\prod_{m=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{\varphi + \chi}{m\pi} \right)^2 \right]}.$$

Durch leichte Umformung setzt sich diese Gleichung in folgende um:

$$T = \frac{\varphi - \chi}{\varphi + \chi} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\varphi - \chi}{\pi} \right)^2}{\left(1 - \frac{\varphi + \chi}{\pi} \right) \left(1 + \frac{\varphi + \chi}{\pi} \right)} \cdot \prod_{m=2}^{\infty} \frac{1 - \left(\frac{\varphi - \chi}{m\pi} \right)^2}{1 - \left(\frac{\varphi + \chi}{m\pi} \right)^2}$$

Frl. Meitner fährt nun in ihrer Arbeit wörtlich fort: „Für $\varphi = \chi$ verschwindet das Produkt rechter Hand, weil der Faktor $\varphi - \chi = 0$ wird. Gelingt es nun, φ so zu bestimmen, daß sich $\varphi - \chi$ gegen einen der Faktoren im Nenner weghebt, wie groß immer χ, d. h. wie groß immer der relative Brechungsexponent sein mag, so wird der obige Ausdruck auch für $\varphi = \chi$ von Null verschieden sein.

φ soll nun so bestimmt werden, daß

$$\varphi - \chi = 1 - \frac{\varphi + \chi}{\pi}$$

wird. Setzt man $\varphi - \chi = \delta$, so ist

$$\delta = 1 - \frac{2\varphi - \delta}{\pi}$$

$$\varphi = \frac{\pi - (\pi - 1)\,\delta}{2}.$$

Sobald φ dieser Gleichung genügt, kürzt sich der Faktor $\varphi - \chi$ gegen den ersten Faktor im Nenner weg. Wenn man anstatt dieses ersten einen anderen Faktor des Nenners wählt, so ergibt sich für φ ein physikalisch nicht brauchbarer Wert.“

Demnach würde sich nach Meitner nur ein Winkel φ ergeben, für den T einen merklichen Wert besäße, nämlich nur für den bestimmten Wert φ, der obiger Gleichung genügt. Das steht nun im Gegensatz zur Erfahrung, denn nicht nur bei einem bestimmten Einfallswinkel tritt die erwähnte Erscheinung auf, sondern stetig bei verschiedenen verhältnismäßig großen Einfallswinkeln. Wir werden in unseren späteren Berechnungen zeigen, wie der Wert T, der zu obigem Winkel φ gehört, sich in eine Reihe stetig abnehmender Größen einfügt. Gibt also danach das Verfahren von Frl. Meitner nur eine ganz spezielle Lösung, so muß ferner bemerkt werden, daß in der Abhandlung eine Durchführung dieser Betrachtungen nicht erfolgt, man auch nicht erfährt, wie denn eigentlich der Winkel φ genau bestimmt wird. Auch für die Berechnung der unendlichen Produkte ist nur ein Näherungsverfahren angegeben ohne genaueres Resultat. Das, was Meitner übersehen hat, ist die Möglichkeit, daß die Größe $\varphi - \chi$ sich nicht nur gegen diesen einen Faktor, der in

der Abhandlung angegeben ist, wegkürzen läßt, sondern daß es wohl möglich ist, $\varphi - \chi$ gegen andere Werte wegzuheben, und zwar nicht gegen einen Faktor, sondern gegen das Produkt zweier oder mehrerer Faktoren des Nenners, wie man sich leicht überzeugen kann. Dann erhält man auch mehrere Werte T, wie es dem Versuch entsprechend ist.

Die Berechnungen Meitners.

Um nun über den wahren Wert der Größe T, die der obigen Bedingungsgleichung entspricht, eine Klärung zu erhalten, habe ich versucht, nach dem Meitnerschen Vorgange mit Hilfe der unendlichen Produkte diesen Wert zu berechnen. Die Verfasserin gibt nur an, derselbe läge zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{\pi}{8}$. Es ist mir nun gelungen, eine genaue Berechnung des Produktes zu finden. Der Gang der Rechnung ist dabei folgender:

Es war angesetzt:

$$T = \frac{\varphi - \chi}{\varphi + \chi} \frac{1 - \left(\frac{\varphi - \chi}{\pi}\right)^2}{\left(1 + \frac{\varphi + \chi}{\pi}\right)\left(1 - \frac{\varphi - \chi}{\pi}\right)} \prod_{m=2}^{\infty} \frac{1 - \left(\frac{\varphi - \chi}{m \cdot \pi}\right)^2}{1 - \left(\frac{\varphi + \chi}{m\pi}\right)^2}.$$

Ferner war nach Meitner

$$\varphi - \chi = 1 - \frac{\varphi + \chi}{\pi}.$$

Demnach nimmt T die Form an

$$T = \frac{1 - \left(\frac{\varphi - \chi}{\pi}\right)^2}{(\varphi + \chi)\left(1 + \frac{\varphi + \chi}{\pi}\right)} \prod_{m=2}^{\infty} \frac{1 - \left(\frac{\varphi - \chi}{m\pi}\right)^2}{1 - \left(\frac{\varphi + \chi}{m\pi}\right)^2}.$$

Setzt man nun zur ersten Annäherung

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

ein, so erhält man

$$T = \frac{1}{2\pi} \prod_{m=2}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{m^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \prod_{m=2}^{\infty} \frac{m^2}{m^2 - 1}.$$

Nimmt man nun eine ganz beliebige Stelle des unendlichen Produktes, das man sich aufgelöst denkt, heraus, so kann man diese Stelle in der folgenden Form schreiben.

$$\frac{(m+n-1)^2}{(m+n-1)^2-1} \cdot \frac{(m+n)^2}{(m+n)^2-1} \cdot \frac{(m+n+1)^2}{(m+n+1)^2-1}.$$

Dabei ist n eine beliebige ganze Zahl. Nun können wir immer den Zähler eines Bruches zusammennehmen mit dem Nenner des vorhergehenden. Das ergibt z. B.

$$\frac{(m+n)^2}{(m+n-1)^2-1} = \frac{(m+n)^2}{(m+n)^2-2(m+n)} = \frac{m+n}{m+n-2}.$$

Weiterhin

$$\frac{(m+n+1)^2}{(m+n)^2-1} = \frac{(m+n+1)^2}{(m+n+1)(m+n-1)} = \frac{m+n+1}{m+n-1}.$$

Demnach nimmt unser unendliches Produkt an dieser beliebigen Stelle die Form an

$$\frac{(m+n-1)^2}{m+n-2} \cdot \frac{m+n}{m+n-1} \cdot \frac{m+n+1}{m+n} \cdot \frac{m+n+2}{m+n+1}.$$

Daraus ersehen wir, daß sich immer Zähler des einen Bruchs und Nenner des folgenden wegheben, und es bleibt für T der Wert übrig

$$T = \left[\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{m^2}{m-1} \cdot \frac{1}{m}\right]_{m=2}$$

$$T = \frac{1}{\pi}.$$

Die logarithmische Berechnung ergibt

$$T = 0{,}3183.$$

Diesen Wert werden wir nun mit den Größen vergleichen, die ich selbst nach den Fresnelschen Formeln errechnet

habe, und nachweisen, daß damit nur ein Wert in der Reihe der stetig wachsenden Energiewerte gewonnen ist, nicht, wie es hier scheint, ein besonderer Spezialwert. Um diesen Nachweis vorwegzunehmen, muß allerdings auf die dem folgenden Hauptteil unserer Arbeit beigefügten Tabellen VII und VIII verwiesen werden, wo die φ und χ entsprechenden Winkel mit η und ε bezeichnet sind und sich in der Rubrik für die Linie Li befinden.

Für $\varphi = 87^0\,28{,}2'$ ergibt sich in unserem Fall ein Wert

$$\chi = 85^0\,7',$$

und zwar genügen diese beiden Winkel der Meitnerschen Bedingungsgleichung. Führt man nämlich in dieser Bedingungsgleichung an Stelle der arcus-Werte die Winkelmaße ein, so erhält man die einfache Beziehung

$$2\varphi = 180 - 2{,}14159\,\delta,$$

wobei $\delta = \varphi - \chi$ ist.

In unserem Fall ist nun

$$\varphi - \chi = 2^0\,21{,}2'.$$

Im Graden angegeben ist

$$\varphi = 87{,}47^0$$
$$\delta = 2{,}353^0.$$

Demnach

$$2\varphi = 174{,}94^0$$
$$(\pi - 1)\,\delta = 5{,}04^0.$$

Summiert ergibt das: $179{,}98^0$. Man sieht daraus, daß die Meitnersche Bedingungsgleichung erfüllt ist.

Es müßte also nach den Angaben Dr. Meitners der Fall eintreten, der in der Abhandlung folgendermaßen beschrieben wird: „Ist aber der Einfallswinkel so gewählt, daß er der obigen Gleichung genügt, so wird im roten Teile des Spektrums starke Reflexion eintreten. Die Menge des reflektierten Lichtes sowie der Winkel, für welchen dieses Maximum der Reflexion eintritt, lassen sich angenähert berechnen."

Von einem Maximum der Reflexion kann man hier wohl kaum sprechen. Berechnet man für die beiden Winkel, die wir hier haben, nach der Formel

$$T = \frac{\sin(\varphi - \chi)}{\sin(\varphi + \chi)},$$

den Wert der Komponente, so erhält man

$$T = 0{,}3184.$$

Dieser Wert nimmt keine Sonderstellung ein. Man findet nämlich für

$$\varphi = 87^\circ 30'$$
$$T = 0{,}32206$$

und für den kleineren Winkel

$$\varphi = 87^\circ 28{,}1'$$
$$T = 0{,}31795.$$

Wir sehen also, daß der Wert T, der der Meitnerschen Bedingungsgleichung genügt, stetig in die Reihe der von mir berechneten Werte hineinpaßt, ohne einen Extremwert zu repräsentieren. Die Behauptung, es fände hier ein Maximum der Reflexion statt, ist demnach nicht richtig. —

Trifft nun auch das Resultat, das die erwähnte Schrift angibt, nämlich, daß die Fresnelschen Formeln hinreichen, um die von Rayleigh beobachteten Erscheinungen zu erklären, zu, so erreicht man doch durch diese umständliche Rechnung in derselben zum mindesten nichts mehr, als wenn man die einfachen Fresnelschen Formeln in ihrer gewöhnlichen Form anwendet, wofür in dieser Arbeit der Beweis geliefert werden soll.

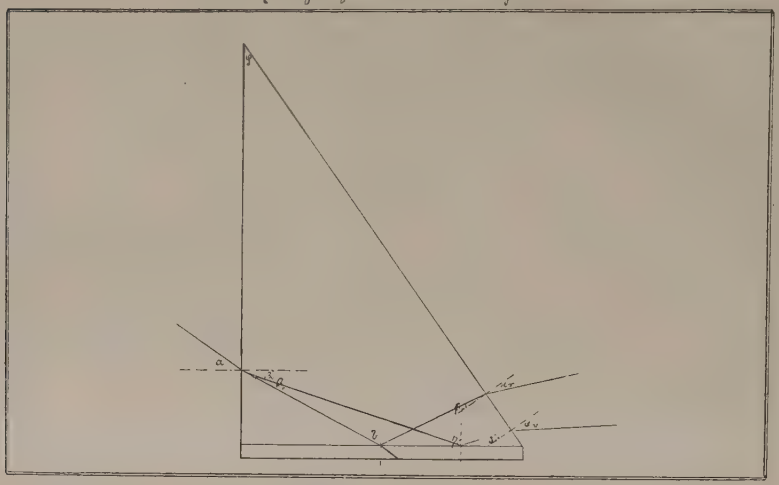
Praktische Durchführung der Benutzung der Fresnelschen Formeln.

Das Ziel unserer folgenden Untersuchungen geht nun dahin, einen Weg zur Berechnung der einzelnen Spektralintensitäten zu finden. Zu dem Zwecke denken wir uns ein rechtwinkliges Hohlglasprisma mit einer Mischung von Schwefelkohlenstoff und Benzol gefüllt. Auf die eine Kathetenfläche möge ein Bündel Sonnenstrahlen fallen, das an der anderen Kathetenfläche, welche aus einer Platte von Leichtflintglas bestehen soll, deren Brechungsexponent für die „D“ Linie genau mit demjenigen der Mischung übereinstimmt, reflektiert wird und durch die Hypotenusenfläche das Prisma verläßt.

Die Berechnung des Strahlenganges im Prisma, die rechnerische und graphische Darstellung der Helligkeitsverteilung in dem von den durch die Hypotenusenfläche austretenden Strahlen entworfenen Spektrum wird unser weiteres Ziel sein. —

Bei unserer Versuchsanordnung benutzen wir nun ein Hohlglasprisma, das einen Winkel von 90°, einen von 35° und einen von 55° besitzt (siehe Skizze Fig. A). Die Wahl dieser Größenverhältnisse unterlag keinen besonderen Bedingungen, und es zeigte sich, daß nach Auswahl einer Glasplatte, deren

Strahlengang im Prisma. Fig. A



Brechungsexponenten für einige wichtige Linien mir durch Messung bekannt waren, die getroffene Anordnung für unsere weiteren Berechnungen geeignet war. Der Gang der Strahlen ist dabei der folgende (Fig. A). Der Winkel, den die einfallenden Strahlen mit dem Lot auf der breiten Kathetenfläche bilden, wird mit α bezeichnet, der Brechungswinkel mit β. Nun gehen die Strahlen so durch die oben erwähnte Mischung, daß sie auf die schmälere Kathetenfläche mit dem gleichen Exponenten für die „D“ Linie auftreffen. Hier fallen sie unter dem Winkel η ein, der Brechungswinkel führt die Bezeichnung ε. Nach Reflexion an dieser Kathetenfläche gehen die Lichtstrahlen unter dem Winkel β' gegen das Lot zur Hypotenusenfläche und verlassen diese unter dem Winkel α'. —

Um in dem entworfenen Spektrum die Intensitätsverteilung angeben zu können, müssen wir zunächst den Gang der Helligkeit in den von uns benutzten Sonnenlichtstrahlen zugrunde legen. Die Helligkeitsverteilung im Sonnenspektrum ist in einer größeren Reihe von Arbeiten untersucht worden, wie von Fraunhofer[11]), Ångstroem[12]), Nutting[13]), Abbot[14]) und andere mehr. Als Grundlage unserer Berechnung haben wir die zwar schon etwas älteren Angaben Vierordts[15]) benutzt, die jedoch für unsere Zwecke vollkommen hinreichten, denn es kommt hier gar nicht darauf an, die zurzeit genauesten Werte der Helligkeitsverteilung, die ja noch von vielen Nebenumständen abhängig ist, zugrunde zu legen, sondern es genügt, den ungefähren Verlauf derselben zu kennen.

In dem Werke von Vierordt[16]) ist durch eine Kurve, die wir in nachstehender Figur wiedergeben, die Lichtstärke des typischen Spektrums dargestellt. Vierordt gibt durchgängig zweierlei Werte an. Er führt einerseits diejenigen auf, welche die Helligkeit des Spektrums angeben, das sein spezieller Spektralapparat entwirft, andererseits gibt er daneben entweder gleich die Werte der Helligkeiten, die das absolute Spektrum für denselben Fall haben würde, oder die Reduktionsmethode an, durch die es möglich ist, sein spezielles Spektrum, das er mit dem Namen „prismatisches“ belegt, in das absolute Spektrum für den bestimmten Körper, das er als „typisches“ bezeichnet, umzurechnen. Aus dieser oben erwähnten Kurve können wir nun für die einzelnen λ die Intensitäten entnehmen, wie sie uns das Sonnenspektrum liefert. Diese Werte sind in Tabelle I enthalten. Hierbei sind zunächst die Vierordt-

---

[11]) J. Fraunhofer, Denkschriften Bayr. Akademie, Jahr 1814 u. 1815, S. 193.

[12]) K. Ångstroem, Nov. Acta Reg. Soc. Sc. Upsal. (3), 1903, 12 pp.

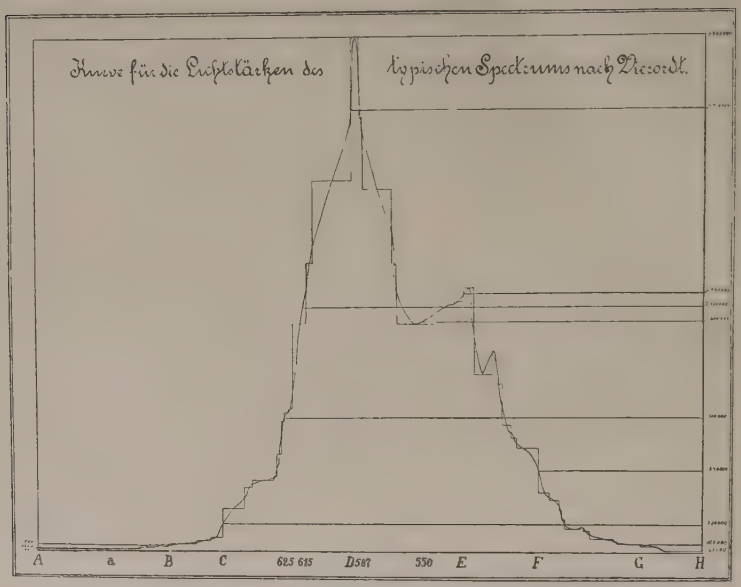
[13]) P. G. Nutting, Bull. Bur. of Standards 5, p. 761, 1908.

[14]) C. S. Abbot, Ann. Astrophys. Observ. Smiths. Institution Val. II, 1908.

[15]) K. Vierordt, Pogg. Ann., 114. Bd., S. 145, 1861; 137. Bd., S. 200, 1869.

[16]) K. Vierordt, Die Anwendung des Spektralapparates zur Messung und Vergleichung der Stärke des farbigen Lichtes. Tübingen 1871.

schen Einheiten zugrunde gelegt. In einer zweiten Reihe sind die Intensitäten derart umgerechnet, daß die hellste Stelle mit der Intensität 1 bezeichnet worden ist, und die anderen Werte dementsprechend reduziert sind. Nun kommt es darauf an, für unser spezielles Spektrum unter Zugrundelegung dieser letzteren Werte die einzelnen Lichtstärken zu berechnen. —



Dazu verweisen wir auf die Tabellen II und III, welche die Brechungsexponenten der Mischung sowie des reflektierenden Glases enthalten für Lichtstrahlen, deren Wellenlängen um ungefähr 20 $\mu\mu$ fortschreiten, wobei diejenigen Strahlarten gewählt sind, die bekannten Linien entsprechen. In den Tabellen IV, V, VI, VII, VIII sind die Werte der oben erwähnten Winkel β, η, ε, β', α' enthalten für eine größere Anzahl von Einfallswinkeln α. Die Winkel sind nach dem Snelliusschen Gesetz berechnet; den Gang der Festlegung für die Werte der Tabellen II und III werden wir zusammen mit der Bestimmung der für unsere spezielle Anordnung notwendigen Mischungsverhältnisse als Anhang zu dieser Arbeit wiedergeben. —

Tabelle I.

Helligkeitswerte nach Vierordt.

Linien	Absolute Helligkeiten	Relative Helligkeiten auf $\lambda = 0{,}587\ \mu$ bez.
A — 0,760 μ	10 000	0,00174
a — 0,718	20 000	0,00348
B — 0,686	65 000	0,01132
C — 0,656	330 000	0,05741
0,625	1 500 000	0,26132
0,615	2 750 000	0,4791
D — 0,589	4 950 000	0,86237
0,587	5 740 000	1,0
0,550	2 600 000	0,453
E — 0,527	2 920 000	0,50871
F — 0,486	840 000	0,14634
G — 0,431	100 000	0,01742
H — 0,396	20 000	0,00348

Tabelle II und III.

Brechungsexponenten

für das Glas

Linie	λ in μ	n
H	0,396	1,6469
	0,418	1,6019
G	0,431	1,5994
	0,455	1,5963
F	0,486	1,5909
b	0,518	1,5869
E	0,527	1,5853
	0,550	1,5839
	0,587	1,5809
D	0,589	1,5808
	0,615	1,579
	0,625	1,5784
C	0,656	1,5767
Li	0,671	1,5759
B	0,686	1,5753
	0,700	1,5746
a	0,718	1,5737
	0,740	1,5730
A	0,760	1,5724

für die Mischung.

Linie	λ in μ	n
H	0,396	1,6393
	0,418	1,6267
G	0,431	1,6204
	0,455	1,6108
F	0,486	1,6009
b	0,518	1,5931
E	0,527	1,5912
	0,550	1,5868
	0,587	1,5811
D	0,589	1,5808
	0,615	1,5775
	0,625	1,5763
C	0,656	1,5732
Li	0,671	1,5717
B	0,686	1,5706
	0,700	1,5695
a	0,718	1,5681
	0,740	1,5667
A	0,760	1,5655

Tabelle IV.

Winkel β.

Linie	H		G		F	b	E		
Wellenlänge λ	0,396	0,418	0,431	0,455	0,486	0,518	0,527	0,550	0,587
α									
1°	0° 36,6′	0° 36,9′	0° 37′	0° 37,2′	0° 37,5′	0° 37,7′	0° 37,7′	0° 37,8′	0° 37,9′
2	1 13,2	1 13,8	1 14	1 14,5	1 14,9	1 15,3	1 15,4	1 15,6	1 15,9
4	2 26,3	2 27,5	2 28	2 28,9	2 29,8	2 30,6	2 30,8	2 31,2	2 31,7
6	3 39,4	3 41,1	3 41,9	3 43,2	3 44,6	3 45,7	3 46	3 46,6	3 47,4
8	4 52,2	4 54,5	4 55,6	4 57,4	4 59,2	5 0,7	5 1,1	5 1,9	5 3
10	6 4,8	6 7,7	6 9,1	6 11,3	6 13,6	6 15,5	6 15,9	6 17	6 18,3
15	9 5,8	9 9,3	9 11,5	9 14,8	9 18,2	9 21	9 21,7	9 23,2	9 25,3
20	12 2,5	12 8,2	12 11,1	12 15,5	12 20,2	12 23,8	12 24,7	12 26,8	12 29,6
25	14 56,4	15 3,5	15 7,1	15 12,6	15 18,4	15 23	15 24,2	15 26,8	15 30,2
30	17 45,5	17 54,1	17 58,4	18 5	18 12	18 17,5	18 18,9	18 22	18 26,1
50	27 51,5	28 5,7	28 12,8	28 23,7	28 35,3	28 44,4	28 46,7	28 52	28 58,8

Linie	D			C	Li	B		a		A
Wellenlänge λ	0,589	0,615	0,625	0,656	0,671	0,686	0,700	0,718	0,740	0,760
α										
1°	0° 37,9′	0° 38′	0° 38,1′	0° 38,1′	0° 38,2′	0° 38,2′	0° 38,2′	0° 38,3′	0° 38,3′	0° 38,3′
2	1 15,9	1 16,1	1 16,1	1 16,3	1 16,3	1 16,4	1 16,5	1 16,5	1 16,6	1 16,6
4	2 31,7	2 32,1	2 32,2	2 32,5	2 32,6	2 32,7	2 32,8	2 33	2 33,1	2 33,2
6	3 47,5	3 48	3 48,1	3 48,6	3 48,8	3 49	3 49,1	3 49,3	3 49,5	3 49,7
8	5 3	5 3,7	5 3,9	5 4,5	5 4,8	5 5	5 5,2	5 5,5	5 5,8	5 6
10	6 18,4	6 19,2	6 19,5	6 20,2	6 20,6	6 20,9	6 21,1	6 21,5	6 21,8	6 22,1
15	9 25,4	9 26,6	9 27	9 28,2	9 28,7	9 29,1	9 29,5	9 30	9 30,5	9 31
20	12 29,7	12 31,3	12 31,9	12 33,4	12 34,1	12 34,6	12 35,2	12 35,9	12 36,6	12 37,2
25	15 30,4	15 32,4	15 33,1	15 35	15 35,9	15 36,6	15 37,2	15 38,1	15 39	15 39,7
30	18 26,3	18 28,8	18 29,6	18 31,9	18 33	18 33,8	18 34,6	18 35,6	18 36,6	18 37,5
50	28 59,1	29 3,2	29 4,6	29 8,3	29 10,2	29 11,5	29 12,9	29 14,5	29 16,3	29 17,8

Tabelle V.

Winkel β'.

Linie	H		G		F	b	E		
Wellenlänge λ	0,396	0,418	0,431	0,455	0,486	0,518	0,527	0,550	0,587
α									
1°	34° 23,4′	34° 23,1′	34° 23′	34° 22,8′	34° 22,5′	34° 22,3′	34° 22,3′	34° 22,2′	34° 22,1′
2	33 46,8	33 46,2	33 46	33 45,5	33 45,1	33 44,7	33 44,6	33 44,4	33 44,1
4	32 33,7	32 32,5	32 32	32 31,1	32 30,2	32 29,4	32 29,2	32 28,8	32 28,3
6	31 20,6	31 18,9	31 18,1	31 16,8	31 15,4	31 14,3	31 14	31 13,4	31 12,6
8	30 7,8	30 5,5	30 4,4	30 2,6	30 0,8	29 59,3	29 58,9	29 58,1	29 57
10	28 55,2	28 52,3	28 50,9	28 48,7	28 46,4	28 44,5	28 44,1	28 43	28 41,7
15	25 54,2	25 50,7	25 48,5	25 45,2	25 41,8	25 39	25 38,3	25 36,8	25 34,7
20	22 57,5	22 51,8	22 48,9	22 44,5	22 39,8	22 36,2	22 35,3	22 33,2	22 30,4
25	20 3,6	19 56,5	19 52,9	19 47,4	19 41,6	19 37	19 35,8	19 33,2	19 29,8
30	17 14,5	17 5,9	17 1,6	16 55	16 48	16 42,5	16 41,1	16 38	16 33,9
50	7 8,5	6 54,3	6 47,2	6 36,2	6 24,7	6 15,6	6 13,3	6 8	6 1,2

Linie	D			C	Li	B		a		A
Wellenlänge λ	0,589	0,615	0,625	0,656	0,671	0,686	0,700	0,718	0,740	0,760
α										
1°	34° 22,1′	34° 22′	34° 21,9′	34° 21,9′	34° 21,8′	34° 21,8′	34° 21,8′	34° 21,7′	34° 21,7′	34° 21,7′
2	33 44,1	33 43,9	33 43,9	33 43,7	33 43,7	33 43,6	33 43,5	33 43,5	33 43,4	33 43,4
4	32 28,3	32 27,9	32 27,8	32 27,5	32 27,4	32 27,3	32 27,2	32 27	32 26,9	32 26,8
6	31 12,5	31 12	31 11,9	31 11,4	31 11,2	31 11	31 10,9	31 10,7	31 10,5	31 10,3
8	29 57	29 56,3	29 56,1	29 55,5	29 55,2	29 55	29 54,8	29 54,5	29 54,2	29 54
10	28 41,6	28 40,8	28 40,5	28 39,8	28 39,4	28 39,1	28 38,9	28 38,5	28 38,2	28 37,9
15	25 34,6	25 33,4	25 33	25 31,8	25 31,3	25 30,9	25 30,5	25 30	25 29,5	25 29
20	22 30,3	22 28,7	22 28,1	22 26,6	22 25,9	22 25,4	22 24,8	22 24,1	22 23,4	22 22,8
25	19 29,6	19 27,6	19 26,9	19 25	19 24,1	19 23,4	19 22,8	19 21,9	19 21	19 20,3
30	16 33,7	16 31,2	16 30,4	16 28,1	16 27	16 26,2	16 25,4	16 24,4	16 23,4	16 22,5
50	6 0,9	5 56,8	5 55,4	5 51,7	5 49,8	5 48,5	5 47,1	5 45,5	5 43,7	5 42,2

Tabelle VI.

Winkel α'.

Linie	H		G		F	b	E		
Wellenlänge λ	0,396	0,418	0,431	0,455	0,486	0,518	0,527	0,550	0,587
α									
1°	67° 48,4′	66° 44′	66° 13′	65° 27′	64° 38,5′	64° 4,7′	63° 56,1′	63° 34′	63° 11,7′
2	65 42,5	64 43	64 14,5	63 31,6	62 48,2	62 14,9	62 6,7	61 48,3	61 24,7
4	61 55,1	61 2,7	60 37,4	59 59,3	59 20,6	58 50,6	58 43,1	58 26,6	58 5,4
6	58 30,4	57 43,3	57 20,3	56 45,6	56 10	55 42,9	55 35,8	55 20,4	55 0,9
8	55 22,5	54 38,8	54 17,4	53 45,2	53 12,2	52 46,6	52 40,2	52 25,9	52 7,5
10	52 26,6	51 45,7	51 25,7	50 55,4	50 24,4	50 0,2	49 54,2	49 40,6	49 23,4
15	45 44,2	45 9,8	44 52	44 25,2	43 57,7	43 36	43 30,6	43 18,7	43 3
20	39 44,9	39 11,9	38 55,6	38 30,9	38 5,2	37 45,4	37 40,5	37 29,3	37 14,7
25	34 12,8	33 41,8	33 26,4	33 3,1	32 38,9	32 20	32 15,3	32 4,7	31 51
30	29 4,3	28 34,3	28 19,5	27 57	27 33,8	27 15,6	27 11	27 0,9	26 47,6
50	11 45,6	11 16,7	11 2,4	10 40,7	10 17,9	10 0,2	9 55,8	9 45,6	9 32,7

Linie	D			C	Li	B		a		A
Wellenlänge λ	0,589	0,615	0,625	0,656	0,671	0,686	0,700	0,718	0,740	0,760
α										
1°	63° 10,4′	62° 55,8′	62° 50,6′	62° 37,3′	62° 30,8′	62° 26,2′	62° 21,5′	62° 15,6′	62° 9,8′	62° 4,7′
2	61 23,3	61 9,6	61 5	60 52,1	60 46,4	60 41,9	60 37,3	60 32	60 26,3	60 21,6
4	58 4,3	57 51,6	57 47,4	57 35,9	57 30,3	57 26,5	57 22,5	57 17,3	57 12,3	57 7,8
6	54 59,8	54 48,1	54 44,3	54 33,4	54 28,4	54 24,8	54 21,1	54 16,4	54 12,1	54 7,4
8	52 6,7	51 55,8	51 52,1	51 42,1	51 37,3	51 33,9	51 30,5	51 26	51 21,4	51 17,7
10	49 22,5	49 12,3	49 8,7	48 59,4	48 54,8	48 51,5	48 48,3	48 44,1	48 39,9	48 36,2
15	43 2,2	42 53,1	42 50	42 41,3	42 37,4	42 34,4	42 31,4	42 27,6	42 23,9	42 20,5
20	37 14,1	37 5,6	37 2,6	36 54,8	36 51,1	36 48,4	36 45,4	36 41,9	36 38,4	36 35,3
25	31 50,3	31 42,3	31 39,5	31 32	31 28,4	31 25,7	31 23,2	31 19,5	31 16,4	31 13,5
30	26 46,9	26 39	26 36,4	26 29,2	26 25,7	26 23,2	26 20,6	26 17,4	26 14,2	26 11,4
50	9 32,1	9 24,4	9 21,7	9 14,6	9 11,2	9 8,8	9 6,1	9 3,1	8 59,8	8 57

Tabelle VII.

Winkel η.

Linie	H		G		F	b	E		
Wellenlänge λ	0,396	0,418	0,431	0,455	0,486	0,518	0,527	0,550	0,587
α									
1°	89° 23,4′	89° 23,1′	89° 23′	89° 22,8′	89° 22,5′	89° 22,3′	89° 22,3′	89° 22,2′	89° 22,1′
2	88 46,8	88 46,2	88 46	88 45,5	88 45,1	88 44,7	88 44,6	88 44,4	88 44,1
4	87 33,7	87 32,5	87 32	87 31,1	87 30,2	87 29,4	87 29,2	87 28,8	87 28,3
6	86 20,6	86 18,9	86 18,1	86 16,8	86 15,4	86 14,3	86 14	86 13,4	86 12,6
8	85 7,8	85 5,5	85 4,4	85 2,6	85 0,8	84 59,3	84 58.9	84 58,1	84 57
10	83 55,2	83 52,3	83 50,9	83 48,7	83 46,4	83 44.5	83 44,1	83 43	83 41,7
15	80 54,2	80 50,7	80 48,5	80 45,2	80 41,8	80 39	80 38,3	80 36,8	80 34,7
20	77 57,5	77 51,8	77 48,9	77 44,5	77 39,8	77 36,2	77 35,3	77 33,2	77 30,4
25	75 3,6	74 56,5	74 52,9	74 47,4	74 41,6	74 37	74 35,8	74 33,2	74 29,8
30	72 14,5	72 5,9	72 1,6	71 55	71 48	71 42,5	71 41,1	71 38	71 33,9
50	62 8,5	61 54,3	61 47,2	61 36,3	61 24,7	61 15,6	61 13,3	61 8	61 1,2

Linie	D			C	Li	B		a		A
Wellenlänge λ	0,589	0,615	0,625	0,656	0,671	0,686	0,700	0,718	0,740	0,760
α										
1°	89° 22,1′	89° 22′	89° 21,9′	89° 21,9′	89° 21,8′	89° 21,8′	89° 21,8′	89° 21,7′	89° 21,7′	89° 21,7′
2	88 44,1	88 43.9	88 43,9	88 43,7	88 43,7	88 43,6	88 43,5	88 43,5	88 43,4	88 43,4
4	87 28,3	87 27,9	87 27,8	87 27,5	87 27,4 87 28,2	87 27,3	87 27,2	87 27	87 26,9	87 26,8
6	86 12,5	86 12	86 11,9	86 11,4	86 11,2	86 11	86 10,9	86 10,7	86 10,5	86 10,3
8	84 57	84 56,3	84 56,1	84 55,5	84 55,2	84 55	84 54,8	84 54,5	84 54,2	84 54
10	83 41,6	83 40,8	83 40,5	83 39,8	83 39,4	83 39,1	83 38,9	83 38,5	83 38,2	83 37,9
15	80 34,6	80 33,4	80 33	80 31,8	80 31,3	80 30,9	80 30,5	80 30	80 29,5	80 29
20	77 30,3	77 28,7	77 28,1	77 26,6	77 25,9	77 25,4	77 24,8	77 24,1	77 23,4	77 22,8
25	74 29,6	74 27,6	74 26,9	74 25	74 24,1	74 23,4	74 22,8	74 21,9	74 21	74 20,3
30	71 33,7	71 31,2	71 30,4	71 28,1	71 27	71 26,2	71 25,4	71 24,4	71 23,4	71 22,5
50	61 0,9	60 56,8	60 55,4	60 51,7	60 49,8	60 48,5	60 47,1	60 45,5	60 43,7	60 42,2

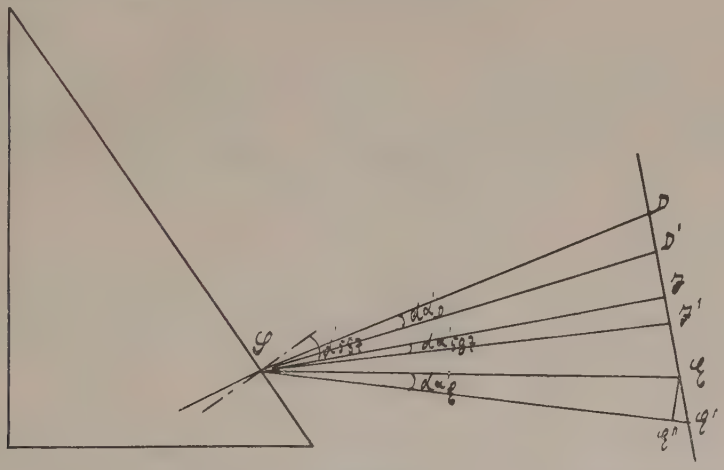
Tabelle VIII.

Winkel ε.

Linie	H		G		F	b	E		
Wellenlänge λ	0,396	0,418	0,431	0,455	0,486	0,518	0,527	0,550	0,587
α									
1°									
2									89° 8′
4									87 40
6								88° 27′	86 20
8							88° 10′	86 20	85 2
10						86° 20′	85 50	84 45	83 46,5
15				85° 17′	83° 14,5′	82 8	81 53	81 16	80 37,5
20	86° 8′	83° 6′	82° 1′	80 39,5	79 26	78 40,5	78 29.5	78 2	77 32,2
25	80 17,7	78 41,7	77 58,7	77	76 4	75 27,3	75 18,3	74 56,3	74 31,3
30	76 18,3	75 5	74 30,5	73 42,8	72 45,8	72 24	72 16,3	71 57	71 35,5
50	64 24,8	63 36,7	63 13,3	62 39,3	62 4,7	61 40,3	61 34,4	61 19,4	61 2

Linie	D			C	Li	B		a		A
Wellenlänge λ	0,589	0,615	0,625	0,656	0,671	0,686	0,700	0,718	0,740	0,760
α										
1°	89° 22,1′	87° 21′	86° 58′	86° 7′	85° 46′	85° 32′	85° 20′	85° 8′	84° 50′	84° 35′
2	88 44,1	87 8	86 46	85 58	85 37 85 7	85 24	85 13	85 0,5	84 43	84 29
4	87 28,3	86 25	86 7	85 25	85 6	84 54	84 44	84 33	84 17	84 3,5
6	86 12,5	85 25	85 11	84 36	84 21	84 10	84 1	83 51,5	83 37	83 24,5
8	84 57	84 20	84 8	83 39	83 25	83 16,5	83 8,5	83	82 46,5	82 36
10	83 41,6	83 12	83 1	82 36	82 24	82 16,5	82 9,5	82 1,5	81 50	81 40,5
15	80 34,6	80 13,5	80 6,3	79 47,5	79 38,7	79 32,7	79 27	79 21,7	79 12,5	79 5
20	77 30,3	77 13,3	77 7,6	76 53	76 46	76 41	76 36,3	76 31,3	76 24	76 18,3
25	74 29,6	74 15,5	74 10,8	73 57,8	73 51,8	73 47,7	73 43,5	73 39,5	73 33	73 28
30	71 33,7	71 21,2	71 17	71 5,3	71	70 56,3	70 52,8	70 48,8	70 43,4	70 38,6
50	61 0,9	60 50,7	60 47,4	60 38	60 33,6	60 30,4	60 27,3	60 23,9	60 19,3	60 15,4

Wir wählen nun die Ebene des zu entwerfenden Spektrums derart, daß sie auf dem Strahl größter Lichtstärke, d. h. dem Strahl, der der Wellenlänge 587 $\mu\mu$ entspricht, senkrecht steht. Durch die Brechung des Lichtes in dem Prisma werden die einzelnen Bezirke des Spektrums bekanntlich derartig verändert, daß sie zum Teil verengert, zum Teil erweitert sind gegenüber dem typischen Spektrum. Wird ein Bereich verengert, so wird dadurch seine Lichtstärke vermehrt, da dieselbe Lichtmenge auf eine kleinere Fläche kommt als beim typischen, umgekehrten Falles wird sie vermindert. Unter Berücksichtigung dieser Tatsache müssen wir nun ermitteln, in welcher Weise unser prismatisches Spektrum gegenüber dem typischen erweitert oder kontrahiert ist; wir müssen, um diesen Ausdruck zu gebrauchen, uns den Kontraktionskoeffizienten für die einzelnen Bezirke berechnen[18]). Dieser Kontraktionskoeffizient muß, da wir die Lichtstärke für einzelne Linien haben wollen, für den Bereich einer Linie, d. h. also für unendlich kleine Bezirke ermittelt werden. Zur genaueren Erläuterung dient die nachstehende Figur.



Der Punkt S sei der Austrittspunkt des Strahles von der Wellenlänge $\lambda = 587\ \mu\mu$. Der Winkel, den dieser Strahl nach

[18]) An Stelle der obigen Darlegung würde man gleichfalls zum Ziele gelangen unter Benutzung der Überlagerungen von Langley Rubens, Paschen; vergl. Kaysers Handbuch I, S. 746 f.

seinem Austritt mit dem Lot im Punkte S der Hypotenusenfläche des Prismas bildet, führe die Bezeichnung α'_{587}. Wir können nun, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, annehmen, S wäre auch der Austrittspunkt für die Strahlen anderer Brechbarkeit, die zu demselben Strahlenbündel gehören. Die entsprechenden Winkel werden dann α'_D, α'_E usw. genannt werden. Das Differential des Winkels α'_{587} bezeichnen wir mit $d\alpha'_{587}$, die entsprechenden Differentiale mit $d\alpha'_D$, $d\alpha'_E$ usw. Die gerade Linie D D′ I I′ E E′ repräsentiert die Fläche des Spektrums. I ist der Punkt, in dem der Strahl mit der Wellenlänge 587 $\mu\mu$ die Ebene des Spektrums trifft, I′ der Punkt, in dem der unendlich benachbarte Strich die erwähnte Ebene schneidet, ebenso sind die Punkte E E′ usw. zu definieren. Als Kontraktionskoeffizienten müssen wir dann den Quotienten

$$\frac{E\,E'}{I\,I'} = j$$

ansetzen. Durch einfache Überlegung erhält man dafür

$$j = \frac{1}{\cos^2(\alpha'_E - \alpha'_{587})} \cdot \frac{d\alpha'_E}{d\alpha'_{587}}.$$

Nun gilt es, diesen Kontraktionskoeffizienten und speziell den Faktor $\frac{d\alpha'_E}{d\alpha'_{587}}$ zu berechnen. Zunächst gibt uns das Snelliussche Brechungsgesetz die Gleichung

$$\sin\alpha'_E = n_E \sin\beta'_E,$$

weiterhin ist

$$\eta = R - \varphi + \beta'.$$

Hierin bedeutet φ den brechenden Winkel des Prismas. Daraus gewinnt man

$$\beta' = \eta + \varphi - R.$$

Demnach können wir setzen

$$\begin{aligned}\sin\alpha'_E &= n_E \,.\, \sin(\eta + \varphi - R)\\ &= -\,n_E \,.\, \cos(\eta + \varphi).\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\beta = R - \eta$$
$$\eta = R - \beta$$

$$\sin \alpha'_E = -n_E \cdot \cos (R - \beta + \varphi)$$
$$\sin \alpha'_E = -n_E \cdot \sin (\beta - \varphi) \quad \ldots\ldots\ldots \text{I}$$

daneben gilt nach dem Brechungssatz

$$\sin \alpha = n_E \cdot \sin \beta_E \quad \ldots\ldots\ldots \text{II}$$

Durch Differentiation der mit römischen Zahlen bezeichneten Gleichungen erhält man folgende Beziehungen

$$\cos \alpha'_E \, d\alpha'_E = n'_E \cdot \cos (\beta_E - \varphi) \, d\beta_E \quad \ldots \text{I}'$$
$$\cos \alpha \, d\alpha = n_E \cdot \cos \beta_E \cdot d\beta_E \quad \ldots\ldots \text{II}'$$

Hieraus gewinnt man

$$d\beta_E = \frac{\cos \alpha \, d\alpha}{n_E \cdot \cos \beta_E}.$$

Diesen Wert setzt man in I′ ein und erhält

$$\cos \alpha'_E \, d\alpha'_E = \frac{-n_E \cdot \cos (\beta_E - \varphi) \cos \alpha \, d\alpha}{n_E \cdot \cos \beta_E}$$

$$d\alpha'_E = -\frac{\cos (\beta_E - \varphi) \cdot \cos \alpha \, d\alpha}{\cos \beta_E \cdot \cos \alpha'_E}.$$

Der Wert α erhält keinen Index, da ja die Strahlen verschiedener Wellenlängen unter demselben Winkel einfallen. Ganz entsprechend gewinnt man die Gleichung

$$d\alpha'_{587} = -\frac{\cos (\beta_{587} - \varphi) \cos \alpha \, d\alpha}{\cos \beta_{587} \cdot \cos \alpha'_{587}}.$$

Durch Division erhält man den gewünschten Wert

$$\frac{d\alpha'_E}{d\alpha'_{587}} = \frac{\cos (\beta_E - \varphi) \cdot \cos \beta_{587} \cdot \cos \alpha'_{587}}{\cos (\beta_{587} - \varphi) \cdot \cos \beta_E \cdot \cos \alpha'_E}.$$

Die Werte für die Differentialquotienten $\frac{d\alpha'_x}{d\alpha'_{587}}$ sind in Tabelle IX zusammengestellt. Wir setzen nun die Lichtstärke für die hellste Stelle des Spektrums, d. h. für die Stelle, die der Wellenlänge $\lambda = 587 \; \mu\mu$ entspricht, $= 1$. Dann erhält man die Lichtstärken der anderen Linien dadurch, daß man die typischen Lichtstärken, die auf 1 reduziert sind, durch den

Tabelle IX.

Kontraktionskoeffizienten.

Differential-quotient	α					
	1°	2°	6°	10°	15°	50°
$\frac{d\alpha'_A}{d\alpha'_{587}}$	0,963 1	0,969 33	0,978 82	0,984 98	0,989 7	1,002
$\frac{d\alpha'_a}{d\alpha'_{587}}$	0,968 88	0,972 86	0,982 3	0,987 44	0,991 38	1,001 6
$\frac{d\alpha'_B}{d\alpha'_{587}}$	0,974 63	0,977 85	0,985 6	0,989 76	0,993 03	1,001 3
$\frac{d\alpha'_C}{d\alpha'_{587}}$	0,980 66	0,983 02	0,988 98	0,992 23	0,994 7	1,000 9
$\frac{d\alpha'_{625}}{d\alpha'_{587}}$	0,988 05	0,989 65	0,993 33	0,995 2	0,996 78	1,000 6
$\frac{d\alpha'_{615}}{d\alpha'_{587}}$	0,990 98	0,992 06	0,995 04	0,996 33	0,997 54	1,000 4
$\frac{d\alpha'_D}{d\alpha'_{587}}$	0,999 24	0,999 24	0,999 58	0,999 63	0,999 78	1,0
$\frac{d\alpha'_{550}}{d\alpha'_{587}}$	1,013	1,012 7	1,008	1,005 6	1,003 9	0,999 33
$\frac{d\alpha'_E}{d\alpha'_{587}}$	1,026 3	1,022 9	1,014 5	1,01	1,006 9	0,998 83
$\frac{d\alpha'_F}{d\alpha'_{587}}$	1,054 6	1,046 7	1,029 2	1,020 3	1,013 8	0,997 8
$\frac{d\alpha'_G}{d\alpha'_{587}}$	1,118	1,100 7	1,061 3	1,042 1	1,028 4	0,995 93
$\frac{d\alpha'_H}{d\alpha'_{587}}$	1,193 5	1,162 6	1,095 8	1,065	1.043 2	0,994 43

Kontraktionskoeffizienten dividiert, da ja Lichtstärke und Breite des Bezirks im Spektrum umgekehrt proportional sind[19]).

Bei diesen Berechnungen ist die Lichtstärke des prismatischen Spektrums errechnet in der Voraussetzung, daß die Reflexion an der schmäleren Kathetenfläche des Prismas vollständig ist. Nun gilt es, noch den Faktor zu ermitteln, der uns angibt, wieviel von dem Licht verloren geht, oder vielmehr, welcher Bruchteil reflektiert wird. Hierzu bedienen wir uns folgender Überlegung. Man bezeichne mit E_p die Amplitude der parallel zur Einfallsebene schwingenden, mit E_s die Amplitude der senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Komponente der einfallenden Welle. Ferner mögen R_p und R_s die parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisierten Komponenten der reflektierten Welle bedeuten. Ist endlich η der Einfallswinkel und ε der Winkel, unter dem sich die Welle in das Glas hinein fortpflanzt, so erhält man für die angegebenen Komponenten nach dem Fresnelschen Standpunkt die folgenden Beziehungen:

$$R_s = -E_s \cdot \frac{\sin(\eta - \varepsilon)}{\sin(\eta + \varepsilon)}$$

und

$$R_p = E_p \frac{\operatorname{tg}(\eta - \varepsilon)}{\operatorname{tg}(\eta + \varepsilon)}.$$

Die reflektierten Intensitäten sind nun proportional den Quadraten der Amplituden. Bezeichnet man daher die Intensitäten des einfallenden Lichtes mit I_p^e und I_s^e, des reflektierten mit I_p^r und I_s^r, so ist:

---

[19]) Diese Betrachtung über die Helligkeitsverteilung könnte man auch vorteilhaft unter Zugrundelegung der Formeln, wie sie H. Konen in Kaysers Handbuch entwickelt hat, geben.

Es ist nämlich die Intensität H

$$H = c \int_{\lambda - d_1\lambda}^{\lambda + d_1\lambda} f(\lambda)\, d\lambda$$

wobei $f(\lambda)$ die Intensitätskurve der Lichtquelle darstellt. Zu dem Zwecke müßte für unsere Entwicklung die Funktion $f(\lambda)$ genau definiert sein. Uns boten aber die Vierordtschen Angaben eine einfache Größenskala, so daß wir doch diesen wenn auch etwas langwierigen Weg eingeschlagen haben. Vgl. H. Konen, Kaysers Handbuch, p. 315 u. 316.

$$I_p^r = I_p^e \frac{\operatorname{tg}^2(\eta - \varepsilon)}{\operatorname{tg}^2(\eta + \varepsilon)}$$

und

$$I_s^r = I_s^e \frac{\sin^2(\eta - \varepsilon)}{\sin^2(\eta + \varepsilon)}.$$

Bedeutet endlich I^e die Gesamtintensität des einfallenden Lichtes, so ist die Gesamtmenge des reflektierten Lichtes durch folgende Gleichung bestimmt:

$$I_r = I_p^r + I_s^r$$

oder wenn man die oben angeführten Werte einsetzt

$$I_r = \frac{1}{2} I^e \left[\frac{\sin^2(\eta - \varepsilon)}{\sin^2(\eta + \varepsilon)} + \frac{\operatorname{tg}^2(\eta - \varepsilon)}{\operatorname{tg}^2(\eta + \varepsilon)} \right].$$

Der Quotient $\frac{I^r}{I^e}$ gibt den Betrag an, der reflektiert wird, und wir können diesen Quotienten als Reflexionsfaktor ϱ bezeichnen. In den nachfolgenden Tabellen X sind nun diese Werte ϱ enthalten. Aus den zuletzt genannten Größen und den Lichtstärkewerten, die man auf die oben erwähnte Methode erhalten hat, bekommt man durch Multiplikation die Lichtstärkewerte für das Spektrum, das an der Glasplatte mit dem gleichen Brechungsindex für „D“, wie ihn die Benzol-Schwefelkohlenstoff-Mischung besitzt, eine Reflexion erlitten hat. Diese Werte sind für verschiedene Einfallswinkel berechnet und in den Tabellen XI und XII zusammengestellt worden.

Tabelle X.

λ	η	ε	$\eta-\varepsilon$	$\frac{\sin^2(\eta-\varepsilon)}{\sin^2(\eta+\varepsilon)}$	$\frac{tg^2(\eta-\varepsilon)}{tg^2(\eta+\varepsilon)}$	$\frac{F}{f^2}$
			Reflexionsfaktor			
			$\alpha = 1^\circ$			
A = 0,760	89° 21,7′	84° 35′	4° 46,7′	0,623 61	[illegible]	[illegible]
0,740	[illegible]	[illegible]	4 [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
a = 0,718	89 21,7	85 8	4 13,7	0,590 71	[illegible]	[illegible]
0,700	89 21,8	85 20	4 1,8	0,578 15	[illegible]	[illegible]
B = 0,686	89 21,8	85 32	3 49,8	0,563 9	[illegible]	[illegible]
Li = 0,671	89 21,8	85 46	3 35,8	0,546 01	[illegible]	[illegible]
C = 0,656	89 21,9	86 7	3 14,9	0,517 37	[illegible]	[illegible]
0,625	89 21,9	86 58	2 23,9	0,427 78	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	2 1	[illegible]	[illegible]	[illegible]
D = [illegible]	89 22,1	[illegible] 22,1	0 0	0,0	0,0	0,0
[illegible]	89 22,1	existiert nicht				
0,550	89 22,2	„ „				
E = 0,527	89 22,3	„ „				
b = 0,518	89 22,3	„ „				
F = 0,486	89 22,5	„ „				
0,455	89 22,8	„ „				
G = 0,431	86 23	„ „				
0,418	89 23,1	„ „				
H = 0,396	89 23,4	„ „				
			Reflexionsfaktor			
			$\alpha = 2^\circ$			
A = 0,760	88° 43,4′	84° 29′	4° 14,4′	0,390 65	[illegible]	[illegible]
0,740	88 43,4	84 43	4 0,4	0,374 06	[illegible]	[illegible]
a = [illegible]	88 43,5	85 0,5	3 43	0,352 66	[illegible]	[illegible]
0,700	88 43,5	85 13	3 30,5	0,336 17	[illegible]	[illegible]
B = 0,686	88 43,6	85 24	3 19,6	0,321 57	[illegible]	[illegible]
Li = 0,671	88 43,7	85 37	3 6,7	0,303 46	[illegible]	[illegible]
C = 0,656	88 43,7	85 58	2 45,7	0,271 57	[illegible]	[illegible]
0,625	88 43,9	86 46	1 57,9	0,190 85	[illegible]	[illegible]
0,615	88 43,9	87 8,1	1 35,8	0,149 44	[illegible]	[illegible]
D = 0,589	88 44,1	88 44,1	0	0,0	[illegible]	[illegible]
0,587	88 44,1	89 8	0 23,9	0,034 93	[illegible]	[illegible]
0,550	88 44,4	existiert nicht				
E = 0,527	88 44,6	„ „				
b = 0,518	88 44,7	„ „				
F = 0,486	88 45,1	„ „				
0,455	88 45,6	„ „				
G = 0,431	88 46	„ „				
0,418	88 46,2	„ „				
H = 0,396	88 46,8	„ „				

Tabelle X (Fortsetzung).

λ	η	ε	$\eta - \varepsilon$	$\frac{\sin^2(\eta-\varepsilon)}{\sin^2(\eta+\varepsilon)}$	$\frac{\mathrm{tg}^2(\eta-\varepsilon)}{\mathrm{tg}^2(\eta+\varepsilon)}$	$\frac{I^r}{I^e}$
		Reflexionsfaktor $\alpha = 6^0$.				
A = 0,760	86° 10,3′	83° 24,5′	2° 45,8′	0,071 05	0,068 89	0.069 97
0,740	86 10,5	83 37	2 33,5	0,063 43	0,061 56	0,062 50
a = 0,718	86 10,7	83 51,5	2 19,2	0,054 74	0,053 19	0,053 97
0,700	86 10,9	84 1	2 9,9	0,049 24	0,047 88	0,048 56
B = 0,686	86 11	84 10	2 1	0,044 07	0,042 88	0,043 48
Li = 0,671	86 11,2	84 21	1 50,2	0,038 00	0,037 01	0,037 51
C = 0,656	86 11,4	84 36	1 35,4	0,030 05	0,029 31	0,029 68
0,625	86 11,9	85 11	1 0,9	0,013 97	0,013 66	0,013 82
0,615	86 12	85 25	0 47	0,008 79	0,008 61	0,008 7
D = 0,589	86 12,5	86 12,5	0	0,0	0,0	0,0
0,587	86 12,6	86 20	0 7,4	0,000 274	0,000 269	0,000 271
0,550	86 13,4	88 27	2 13,6	0,175 15	0,173 91	0,174 53
E = 0,527	86 14	existiert nicht				
b = 0,518	86 14,3	„ „				
F = 0,486	86 15,4	„ „				
0,455	86 16,8	„ „				
G = 0,431	86 18,1	„ „				
0,418	86 18,9	„ „				
H = 0,396	86 20,6	„ „				
		Reflexionsfaktor $\alpha = 10^0$.				
A = 0,760	83° 37,9′	81° 40,5′	1° 57,4′	0,018 12	0,016 97	0,017 55
0,740	83 38,2	81 50	1 48,2	0,015 73	0,014 76	0,015 25
a = 0,718	83 38,5	82 1,5	1 37	0,012 99	0,012 20	0,012 6
0,700	83 38,9	82 9,5	1 29,4	0,011 25	0,010 58	0,010 92
B = 0,686	83 39,1	82 16,5	1 22,6	0,009 76	0,009 19	0,009 48
Li = 0,671	83 39,4	82 24	1 15,4	0,008 28	0,007 81	0,008 05
C = 0,656	83 39,8	82 36	1 3,8	0,006 11	0,005 76	0,005 94
0,625	83 40,5	83 1	0 39,5	0,002 49	0,002 36	0,002 43
0,615	83 40,8	83 12	0 28,8	0,001 36	0,001 29	0,001 33
D = 0,589	83 41,6	83 41,6	0 0	0,0	0,0	0,0
0,587	83 41,7	83 46,5	0 4,8	0,000 041	0,000 039	0,000 04
0,550	83 43	84 45	1 2	0,008 14	0,007 81	0,007 98
E = 0,527	83 44,1	85 50	2 5,9	0,040 89	0,039 6	0,040 25
b = 0,518	83 44,5	86 20	2 35,5	0,068 83	0,066 92	0,067 88
F = 0,486	83 46,4	existiert nicht				
0,455	83 48,7	„ „				
G = 0,431	83 50,9	„ „				
0,418	83 52,3	„ „				
H = 0,396	83 55,2	„ „				

Tabelle X (Fortsetzung).

λ	η	ε	$\eta - \varepsilon$	$\frac{\sin^2(\eta-\varepsilon)}{\sin^2(\eta+\varepsilon)}$	$\frac{\mathrm{tg}^2(\eta-\varepsilon)}{\mathrm{tg}^2(\eta+\varepsilon)}$	$\frac{I^r}{I^e}$
		Reflexionsfaktor $\alpha = 15^0$.				
A = 0,760	80° 29′	79° 5′	1° 24′	0,004 90	0,004 30	0,004 6
0,740	80 29,5	79 12,5	1 17	0,004 17	0,003 66	0,003 92
a = 0,718	80 30	79 21,7	1 8,3	0,003 33	0,002 94	0,003 14
0,700	80 30,5	79 27	1 3,5	0,002 90	0,002 57	0,002 74
B = 0,686	80 30,9	79 32,7	0 58,2	0,002 46	0,002 18	0,002 32
Li = 0,671	80 31,3	79 38,7	0 52,6	0,002 03	0,001 80	0,001 92
C = 0,656	80 31,8	79 47,5	0 44,3	0,001 46	0,001 30	0,001 38
0,625	80 33	80 6,3	0 26,7	0,000 55	0.000 49	0,000 52
0,615	80 33,4	80 13,5	0 19,9	0,000 309	0,000 276	0,000 29
D = 0,589	80 34,6	80 34,6	0 0	0,0	0,0	0,0
0,587	80 34,7	80 37,5	0 2,8	0,000 006	0,000 006	0,000 006
0,550	80 36,8	81 16	0 39,2	0,001 34	0,001 21	0,001 28
E = 0,527	80 38,3	81 53	1 14,7	0,005 23	0,004 76	0,005
b = 0,518	80 39	82 8	1 29	0,007 65	0,006 98	0,007 32
F = 0,486	80 41,8	83 14,5	2 32,7	0,025 76	0,023 83	0.024 8
0,455	80 45,2	85 17	4 31,8	0,107 13	0,101 53	0,104 33
G = 0,431	80 48,5	existiert nicht				
0,418	80 50,7	„ „				
H = 0,396	80 54,2	„ „				
		Reflexionsfaktor $\alpha = 50^0$.				
A = 0,760	60° 42,2′	60° 15,4′	0° 26,8′	0,000 083	0,000 022	0,000 053
0,740	60 43,7	60 19,3	0 24,4	0,000 068	0,000 018	0,000 043
a = 0,718	60 45,5	60 23,9	0 21,6	0,000 054	0,000 014	0,000 034
0,700	60 47,1	60 27,3	0 19.8	0,000 045	0,000 012	0,000 029
B = 0,686	60 48,5	60 30,4	0 18,1	0,000 038	0,000 010	0,000 024
Li = 0,671	60 49,8	60 33,6	0 16,2	0,000 031	0,000 008	0,000 020
C = 0,656	60 51,7	60 38	0 13,7	0,000 022	0,000 006	0,000 014
0,625	60 55,4	60 47,4	0 8	0,000 008	0,000 002	0,000 005
0,615	60 56,8	60 50,7	0 6,1	0,000 004	0,000 001	0,000 003
D = 0,589	61 0,9	61 0,9	0 0	0,0	0,0	0,0
0,587	61 1,2	61 2	0 0,9	0,0	0,0	0,0
0,550	61 8	61 19,4	0 11,4	0,000 015	0,000 004	0,000 01
E = 0,527	61 13,3	61 34,4	0 21,1	0,000 053	0,000 016	0,000 035
b = 0,518	61 15,6	61 40,3	0 24,7	0,000 073	0,000 022	0,000 048
F = 0,486	61 24,7	62 4,7	0 40	0,000 195	0,000 059	0,000 127
0,455	61 36,3	62 39,3	1 3	0,000 490	0,000 156	0,000 323
G = 0,431	61 47,2	63 13,3	1 26,1	0,000 935	0,000 308	0,000 622
0,418	61 54,3	63 36,7	1 42,4	0,001 340	0,000 452	0,000 896
H = 0,396	62 8,5	64 24,8	2 16,3	0,002 435	0,000 865	0,001 65

Tabelle XI.

Lichtstärken, ungeschwächt.

λ	α				
	1°	2°	6°	10°	50°
A = 0,760	0,001 81	0,001 79	0,001 77	0,001 76	0,001 74
a = 0,718	0,003 59	0,003 58	0,003 54	0,003 52	0,003 47
B = 0,686	0,011 61	0,011 58	0,011 48	0,011 44	0,011 31
C = 0,656	0,058 54	0,058 40	0,058 05	0,057 86	0,057 36
0,625	0,264 46	0,264 04	0,263 17	0,262 68	0,261 17
0,615	0,483 47	0,482 93	0,481 69	0,481 04	0,478 91
D = 0,589	0,863 04	0,863 04	0,862 74	0,862 70	0,862 37
0,587	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
0,550	0,436 99	0,447 29	0,449 55	0,450 64	0,453 30
E = 0,527	0,495 64	0,497 30	0,501 43	0,503 65	0,509 33
F = 0,486	0,138 67	0,139 72	0,142 12	0,143 38	0,146 64
G = 0,431	0,015 54	0,015 79	0,016 39	0,016 70	0,017 48
H = 0,396	0,002 90	0,002 98	0,003 16	0,003 26	0,003 49

Tabelle XII.

Lichtstärken, durch Reflexion geschwächt.

λ	α				
	1°	2°	6°	10°	50°
A = 0,760	0,001 12	0,000 70	0,000 12	0,000 03	0,000 000 09
a = 0,718	0,002 12	0,001 26	0,000 19	0,000 04	0,000 000 12
B = 0,686	0,006 54	0,003 71	0,000 50	0,000 11	0,000 000 27
C = 0,656	0,030 24	0,015 91	0,001 72	0,000 34	0,000 000 80
0,625	0,113 00	0,050 27	0,003 64	0,000 64	0,000 001 31
0,615	0,182 33	0,072 01	0,004 19	0,000 64	0,000 001 19
D = 0,589	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,587	1,0	0.034 91	0,000 27	0,000 04	0,0
0,550	0,436 99	0,447 29	0,078 46	0,003 60	0,000 004 53
E = 0,527	0,495 64	0,497 30	0,501 43	0,020 27	0,000 017 8
F = 0,486	0,138 67	0,139 72	0,142 12	0,143 38	0,000 018 6
G = 0,431	0,015 54	0,015 79	0,016 39	0,016 70	0,000 010 9
H = 0,396	0,002 90	0,002 98	0,003 16	0,003 26	0,000 005 8

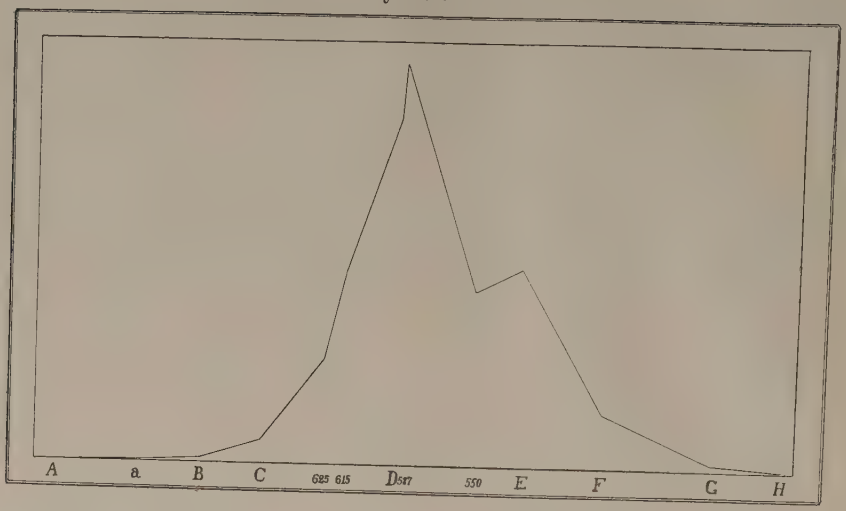
Um nun einen Überblick über die Spektren zu haben, greifen wir zur Kurvendarstellung. Wir tragen auf der Abszissenachse die Werte λ, auf der Ordinatenachse die Lichtstärkenwerte ab und gewinnen so die Kurve, die uns die Lichtverteilung im Spektrum darstellt. Die Kurven der Spektren, die wir als Vergleichsspektren benutzen, d. h. diejenigen, die durch Reflexion keinen Lichtverlust erlitten haben, zeichnen wir nur für die Werte von $\alpha = 1^0$, da diese Kurven sämtlich einen relativ ähnlichen Verlauf zeigen. Die Kurven der Spektren, die durch Reflexion eine Schwächung erlitten haben, sind für die folgenden Einfallswinkel entworfen worden:

$$\alpha = 1^0$$
$$\alpha = 2^0$$
$$\alpha = 6^0$$
$$\alpha = 10^0$$
$$\alpha = 50^0.$$

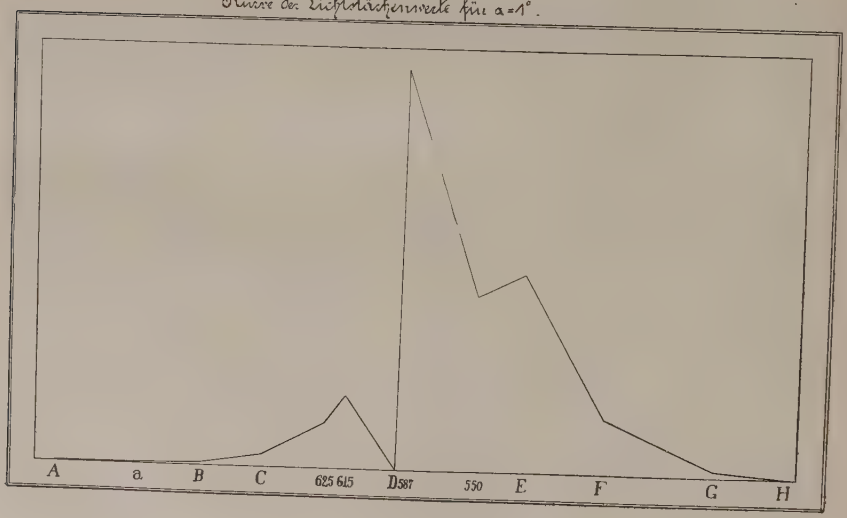
Wir wollen nun an der Hand der Kurven das ableiten, was das Spektrum dem Auge des Beschauers bieten muß. Für $\alpha = 1^0$, d. h. für beinahe streifende Inzidenz hat man eine Totalreflexion im violetten, blauen, grünen und sogar grüngelben Teile des Spektrums. Bis $\lambda = 587\ \mu\mu$ ist noch vollständige Reflexion vorhanden, unmittelbar hinter dieser Stelle tritt ein enormer Intensitätsabfall ein, bei $\lambda = 589\ \mu\mu$ ist die Lichtstärke gleich 0; dann steigt sie allmählich wieder, um bei $\lambda = 615\ \mu\mu$ wieder zu beträchtlicher Größe anzuwachsen. Die Lichtstärke bei der Linie mit der Wellenlänge 615 $\mu\mu$ beträgt über $^1/_3$ der Lichtstärke des Vergleichsspektrums, wie man aus der Tabelle ersehen kann. Für den roten Teil des Spektrums, das können wir also aus Kurve und Tabelle ablesen, herrscht eine beträchtliche, beinahe totale Reflexion. In der Nähe der Linie „D“ zeigt sich ein schwarzer Streifen, der das Spektrum durchzieht.

Nun wollen wir das Spektrum für die Strahlen geringerer Inzidenz betrachten. Für $\alpha = 2^0$ ist bis zur Linie, die der Wellenlänge $\lambda = 550\ \mu\mu$ entspricht, noch Totalreflexion vorhanden. Von diesem Punkte an beginnt ein Intensitätsabfall, der zwar auch noch sehr groß ist, aber dem zuerst erwähnten an Größe nachsteht. Für $\lambda = 615\ \mu\mu$ wird wieder eine beträchtliche Lichtstärke erreicht, wieder durchzieht das Spektrum

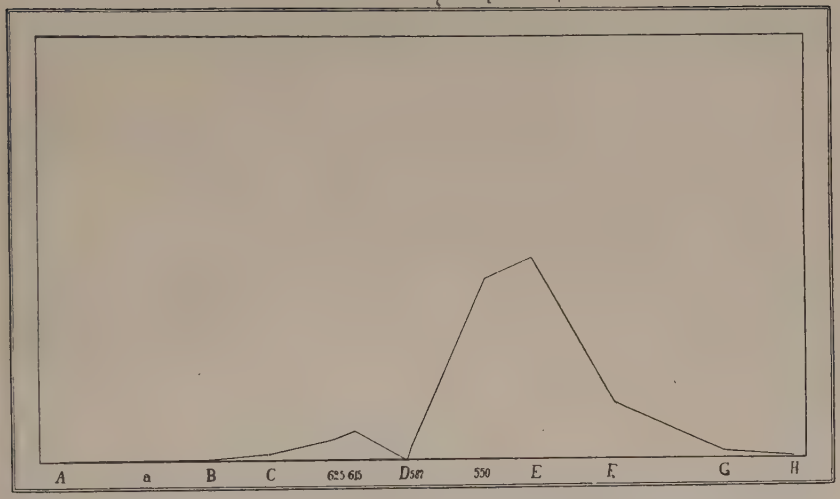
Kurve des Vergleichspektrums (a=1°)



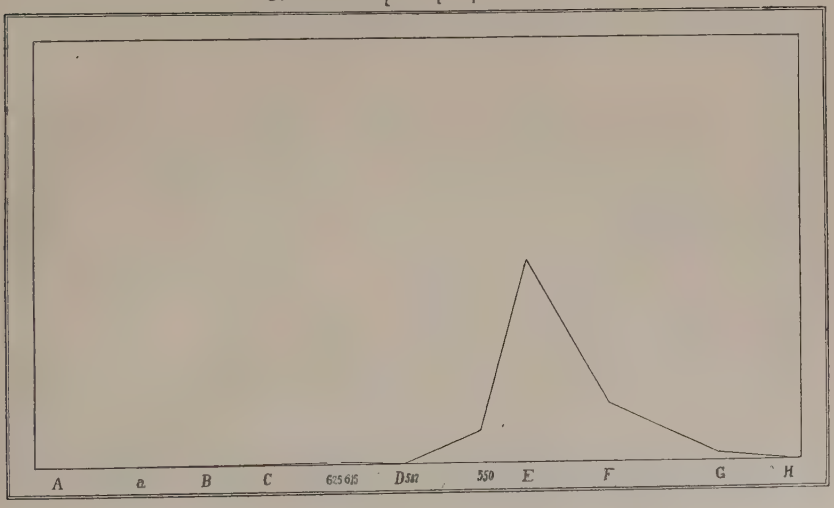
Kurve der Lichtstärkenwerte für a=1°.



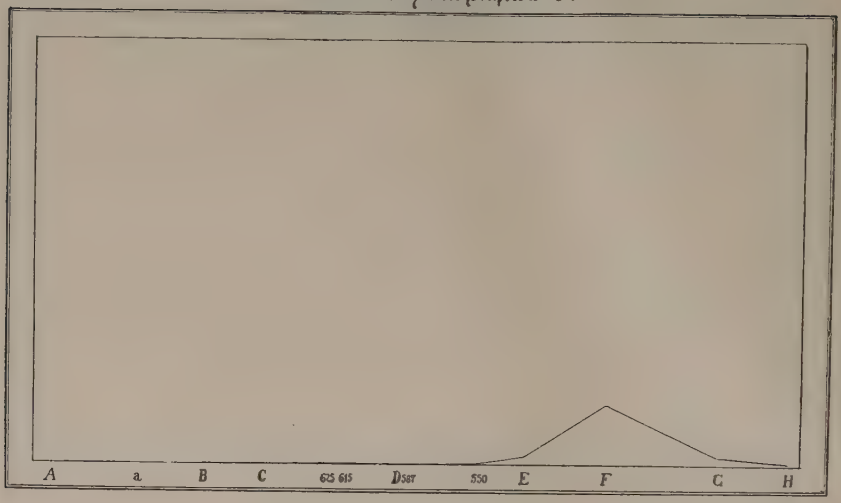
Kurve der Lichtstärkenverteilung für a=8°



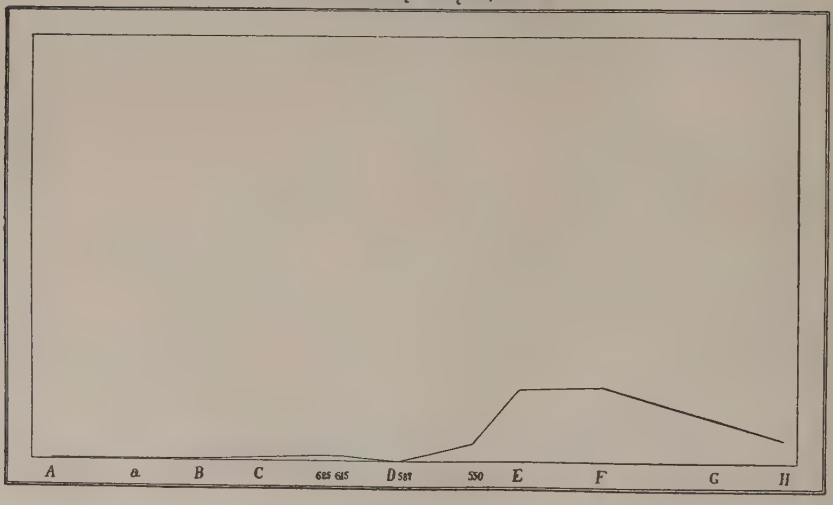
Kurve der Lichtstärken für a=6°



Kurve der Lichtstärken für α=10°.



Kurve der Lichtstärken für α=50°.



ein schmales dunkles Band. Gehen wir zu noch geringerer Inzidenz über, so haben wir folgendes Bild: Für den violetten, blauen und grünen Teil des Spektrums existiert eine derartige Lichtstärke, daß wir noch von totaler Reflexion sprechen können. Die Reflexion im roten Teile des Spektrums steht an Größe der Lichtstärke des Vergleichsspektrums ziemlich nach, ist aber immerhin noch merklich vorhanden. Endlich soll das Bild für den Einfallswinkel $\alpha = 50°$ betrachtet werden. Um in der Kurvendarstellung rechte Deutlichkeit zu erzielen, sind die Ordinaten gegenüber denen der übrigen Zeichnungen 10000fach überhöht. Selbst hierfür können wir das sehen, was Rayleigh mit den Worten beschreibt: „Es herrscht Totalreflexion im Blau und Violett, sehr geringe, doch immerhin merkliche Reflexion im Gelb, stärkere im Rot. Wächst der Einfallswinkel mehr und mehr — so fährt Lord Rayleigh fort — derart, daß das Licht nahezu streifend einfällt, so rückt das Gebiet der Totalreflexion vom blauen Teile des Spektrums gegen den gelben. Im Gelb zeigt sich ein sehr scharf abgegrenzter Streifen, während im Orange und Rot stärkere Reflexion, aber nicht Totalreflexion vorhanden ist."

Zusammenfassung.

Fassen wir demnach unsere Resultate noch einmal kurz zusammen, so können wir folgendes anführen:

Es ist durch vorliegende Abhandlung gezeigt worden, wie man unter Zugrundelegung der Fresnelschen Formeln die Intensitätsverteilung des Spektrums vorliegender Versuchsanordnung genau berechnen kann. Sollte die Mischung wechseln, sollte die reflektierende Glasplatte eine andere sein, so ist der Gang der Rechnung mutandis mutatis identisch mit der unsrigen. Auch eine Änderung der Versuchsanordnung bedingt nur eine unwesentliche Änderung des Rechnungsganges. Die Resultate, die wir erhielten, stehen in voller Übereinstimmung mit der Beobachtung, die Lord Rayleigh gemacht hat. Die Rechnung ergibt stets, daß für eine wenn auch sehr schmale Stelle tatsächlich I_r verschwindet, was Rayleigh bestreitet. Die Fresnelschen Formeln genügen allein, um die Erscheinung zu erklären. Die Heranziehung der Erscheinung der Oberflächenschichten

ist überflüssig, und es zeigt sich kein Grund, warum man an der Richtigkeit der Fresnelschen Reflexionsformeln zweifeln sollte, sie haben vielmehr durch ihre Anwendung auf diese Beobachtung eine neue Stütze erhalten.

Anhang.

Zum Schluß unserer Arbeit wollen wir noch kurz angeben, wie die Mischung von Benzol und Schwefelkohlenstoff rechnerisch so zu bestimmen ist, daß für die „D"-Linie Gleichheit der Brechungsindizes in der Glasplatte und Mischung herrscht. Die Glasplatte, die wir benutzten, hat die folgenden durch Messung festgestellten Brechungsexponenten:

$$n_C = 1{,}5767$$
$$n_D = 1{,}5808$$
$$n_F = 1{,}5908$$
$$n_G = 1{,}5994.$$

Für die verwendete Mischung muß demnach auch gelten

$$n'_D = 1{,}5808.$$

Aus dieser Bedingung kann man sich nun zunächst die Zusammensetzung der Mischung berechnen.

Es bezeichne

n_1 den Brechungsexponenten von Schwefelkohlenstoff,
ϱ_1 die Dichte desselben,
p_1 das Gewicht in g.

Sind nun n_2 ϱ_2 p_2 die analogen Ausdrücke für Benzol, während ϱ die Dichte der Mischung bezeichnet, so gilt die Formel

$$\frac{n^2 - 1}{\varrho} \cdot p = \frac{n_1^2 - 1}{\varrho_1} \cdot p_1 + \frac{n_2^2 - 1}{\varrho_2} \cdot p_2 .$$

Hierin bezeichnet n den Brechungsexponenten der Mischung. Diese Formel ist von verschiedenen Forschern, unter anderen von Wüllner[20]) in seiner umfassenden Arbeit über die Brechungsexponenten von Gemischen untersucht und als prak-

[20]) A. Wüllner, Pogg. Ann. 133, 52, 1868.

tisch durchaus brauchbar befunden worden. Weiterhin gilt allgemein die Gleichung

$$v = \frac{p}{s}$$

worin s das spezifische Gewicht bedeutet. Durch Einführung dieser Beziehung nimmt unsere Gleichung die Form an

$$(n^2 - 1)\, v = (n_1^2 - 1)\, v_1 + (n_2^2 - 1)\, v_2$$

Da nun die tatsächliche Volumkontraktion, wie die Erfahrung lehrt, sehr gering ist, können wir setzen

$$v = v_1 + v_2 .$$

Nehmen wir damit die Umrechnung der Formel vor, so erhalten wir

$$v_2 = v \frac{n_1^2 - n^2}{n_1^2 - n_2^2} .$$

Nach Landolt-Börnstein[21]) ist nun

$$n_{1D} = 1{,}62772$$
$$n_{2D} = 1{,}5005 .$$

Da wir die Volumprozente für Benzol haben wollen, so müssen wir noch $v = 100$ setzen. Die Rechnung ergibt dann

$$v_2 = 37{,}8$$
$$v_1 = 62{,}2 .$$

Nun setzt man umgekehrt die Brechungsexponenten für die einzelnen Linien des Spektrums für Schwefelkohlenstoff und Benzol ein, um die entsprechenden Exponenten der Mischung zu erhalten. Nach den Tabellen von Landolt-Börnstein ist

$$n_{1C} = 1{,}61835$$
$$n_{1F} = 1{,}65236$$
$$n_{1Hj} = 1{,}67495$$

und

$$n_{2C} = 1{,}49592$$
$$n_{2F} = 1{,}51245$$
$$n_{2Hj} = 1{,}52287 .$$

---

[21]) Landolt-Börnstein, Physikalisch-chemische Tabellen, Berlin 1905, S. 671.

Für unsere Mischung findet man dann unter Benutzung obiger Formel z. B. für n_F:

$$(n_F^2 - 1) \cdot 100 = (n_{1F}^2 - 1)\, v_1 + (n_{2F}^2 - 1)\, v_2$$

oder schließlich

$$n_F = \sqrt{n_{1F}^2 \cdot 0{,}62183 + n_{2F}^2 \cdot 0{,}37817}.$$

Entsprechend ergeben sich die Werte für n_C und n_{Hj}. Die Schlußtabelle nimmt dann folgende Gestalt an:

Mischung von Schwefelkohlenstoff und Benzol mit

62,2 % Schwefelkohlenstoff und
37,8 % Benzolgehalt:

$$n_C = 1{,}5732$$
$$n_D = 1{,}5808$$
$$n_F = 1{,}6009$$
$$n_{Hj} = 1{,}6191.$$

Weiterhin war es für uns wichtig, die Brechungsexponenten unserer beiden Medien, nämlich des Glases und der Mischung, für andere Linien des Spektrums zu berechnen. Um dieses zu erreichen, bedienen wir uns der folgenden Dispersionsformel, die mit der von Ketteler, Rubens, Paschen u. a. benutzten übereinstimmt:

$$n^2 = m + \frac{m' \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda'^2}.$$

Fast für alle durchsichtigen Medien stellt diese Formel die Brechungsexponenten mit genügender Genauigkeit dar. Hat man drei möglichst verschiedene Brechungsexponenten n_1, n_2, n_3 für die drei Wellenlängen λ_1, λ_2, λ_3, so lassen sich die übrigen Brechungsexponenten für beliebige Wellenlängen berechnen, indem man setzt:

$$C = \frac{n_2^2 - n_1^2}{n_3^2 - n_1^2}$$

$$\lambda'^2 = \frac{\lambda_3^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) - \lambda_2^2 (\lambda_1^2 - \lambda_3^2) \cdot C}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) - (\lambda_1^2 - \lambda_3^2) \cdot C}$$

$$m' = \frac{(n_3^2 - n_1^2)(\lambda_1^2 - \lambda'^2)(\lambda_3^2 - \lambda'^2)}{\lambda^2 (\lambda_1^2 - \lambda_3^2)}$$

$$m = n_2^2 - \frac{m' \lambda_2^2}{\lambda_2^2 - \lambda'^2}.$$

Gleiche Dienste leistet die Formel von Hartmann[22]), die bereits von Cornu angewendet worden ist

$$n = n_0 + \frac{c}{(\lambda - \lambda_0)^{\alpha}}.$$

Die Resultate der Berechnungen sind, wie bereits erwähnt, in den Tabellen II und III zusammengestellt.

---

[22]) J. Hartmann, Publ. d. astrophys. Obs. zu Potsdam, 12. Anhang, S 1—25, 1902.

Lebenslauf.

Am 16. April 1873 wurde ich als Sohn des Rittergutsbesitzers Voigdt, Dombrowken, Kreis Darkehmen Ostpr., zu Auerfluß geboren und im evangelischen Glauben erzogen. Nach beendeter Schulzeit (Zeugnis der Berechtigung zum einjährig-freiwilligen Dienst) wandte ich mich bald der Technik zu, besuchte das Technikum zu Altenburg S.-A., worauf ich mehrere Jahre als Ingenieur tätig war.

Im April 1905 bestand ich nach privater Vorbereitung das Abiturientenexamen am Königstädtischen Realgymnasium zu Berlin. Hierauf studierte ich ein Semester an der Technischen Hochschule zu Charlottenburg und neun Semester an der Universität Berlin, wo ich bei der philosophischen Fakultät immatrikuliert war. Während meines Studiums beschäftigte ich mich hauptsächlich mit Physik und den dieser Wissenschaft verwandten Fächern sowie mit der Philosophie.